Образовательный центр «Знание».

Контрольная работа по высшей математике №1

№1. Доказать совместность системы и решить ее по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot(-2)\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot(-2)\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot 1 =$$

$$= 9 - 8 + 2 - 6 - 6 + 4 = -5$$

Т.к. определитель системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. Найдем это решение по формулам Крамера.

Для этого рассчитываем определители матриц, полученных из матрицы системы путем замены соответствующего столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(3-2) - 5\cdot(-2+4) = 5 - 10 = -5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(1-3) = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(2-5) = -15$$

Вычисляем неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3$$

Ответ: $(1; 2; 3)$

№11. Даны координаты вершин пирамиды. $A_1(2,\ 4,\ 7)$, $A_2(6,\ 6,\ 2)$, $A_3(5,\ 4,\ 7)$, $A_4(7,\ 3,\ 0)$

Найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) объем пирамиды;
6) уравнение прямой A_1A_2;

Решение.

1) Длину ребра A_1A_2 определяем по формуле расстояния между двумя точками:

$$A_1A_2 = \sqrt{(6-2)^2 + (6-4)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{16+4+25} = 3\sqrt{5}$$

2) Найдем векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (6,\ 6,\ 2) - (2,\ 4,\ 7) = (4;\ 2;\ -5)$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (7,\ 3,\ 0) - (2,\ 4,\ 7) = (5;\ -1;\ -7)$$

Тогда угол между соответствующими сторонами находим с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{4\cdot 5 + 2\cdot(-1) - 5\cdot(-7)}{\sqrt{4^2+2^2+5^2}\sqrt{5^2+1^2+7^2}} = \frac{53\sqrt{15}}{225} = 0.912$$

Отсюда следует, что угол между ребрами равен:

$$\alpha = \arccos 0.912 \approx 24^0$$

3) Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$.

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (5, 4, 7) - (2, 4, 7) = (3;\ 0;\ 0)$$

Тогда векторное произведение равно:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(0-0) - \vec{j}\,(0+15) + \vec{k}\,(0-6) = -15\vec{j} - 6\vec{k}$$

Для нахождения уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ используем уже найденное значение нормального вектора. Разделив для удобства найденное выше векторное произведение на 3, возьмем нормальный вектор в виде:

$$\vec{n} = (0, -5, -2)$$

Тогда уравнение искомой плоскости имеет виде:

$$-5y - 2z + d = 0$$

Значение параметра d определим из условия принадлежности точки A_1 плоскости $A_1A_2A_3$:

$$-5\cdot 4 - 2\cdot 7 + d = 0 \Rightarrow d = 20 + 14 = 34$$

Окончательное уравнение плоскости имеет вид:

$$-5y - 2z + 34 = 0$$

4) Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на соответствующих векторах. Тогда площадь треугольника (грани) равна:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+15^2+6^2} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$$

5) Используя значение только что найденного векторного произведения, можем найти смешанное произведение векторов:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)\overrightarrow{A_1A_4} = -15\cdot(-1) - 6\cdot(-7) = 15 + 42 = 57$$

Это значение численно равно объему параллелепипеда, построенного на соответствующих трех векторах. Тогда объем пирамиды равен:

$$V = \frac{57}{6} = 9.5$$

6) Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ является направляющим вектором прямой A_1A_2, поэтому уравнение прямой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 + 2t \\ z = 7 - 5t \end{cases}$$

или в канонической форме:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-5}$$