

Решение задач из теста по математике за 2009 г.

Вариант 1

Часть В

**Задача В1.** Вычислить  $32 \cos\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right)$

**Решение.**

Сделаем замену переменной:  $t = \arccos \frac{1}{4}$

Тогда

$$32 \cos\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right) = 32 \cos(2t) = 32(2 \cos^2 t - 1)$$

$$\text{Далее } \cos^2 t = \left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

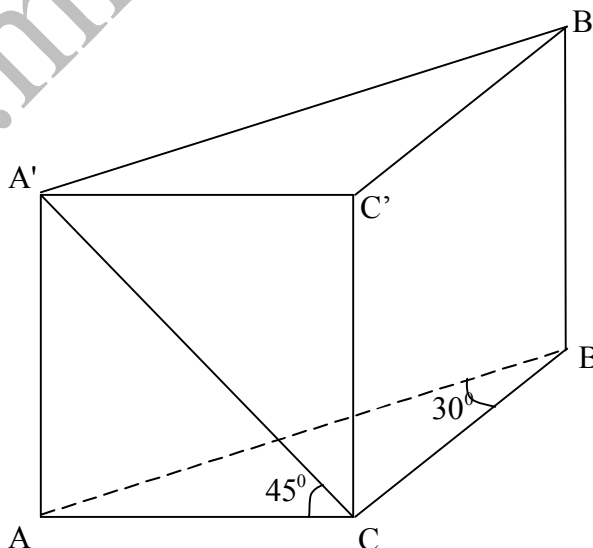
Тогда

$$32 \cos\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right) = 32\left(2 \cdot \frac{1}{16} - 1\right) = 32\left(2 \cdot \frac{1}{16} - 1\right) = 4 - 32 = -28$$

**Ответ:** -28

**Задача В2.** Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, острый угол которого равен  $30^\circ$ . Диагональ боковой грани, содержащей меньшую сторону основания, образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите значение  $\sqrt{3}V$ , где  $V$  - объем призмы, если ее боковое ребро равно 2.

**Решение.**



Пусть  $ABCA'B'C'$  - призма, нижнее основание которой – треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Первый вопрос, на который предстоит ответить – какой угол,  $A$  или  $B$  равен  $30^\circ$ . В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна  $90^\circ$ , поэтому если один из

углов равен  $30^\circ$ , то другой равен  $60^\circ$ , но меньший угол лежит напротив меньшей стороны, поэтому если  $AC$  – меньшая сторона, то угол  $B$  равен  $30^\circ$ .

Грань призмы  $AA'C'C$  содержит меньшую сторону  $AC$ . В этой грани строим диагональ  $A'C$ . По условию  $\angle A'CA = 45^\circ$ . Ребро  $AA' = 2$

Так как призма прямая, то параллелограмм  $AA'C'C$  является прямоугольником, а значит треугольник  $\triangle AA'C$  – прямоугольный. Угол  $\angle AA'C = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , а значит треугольник  $\triangle AA'C$  – равнобедренный, поэтому Ребро  $AC = 2$ .

Из прямоугольного треугольника  $\triangle ACB$  находим:

$$CB = \frac{AC}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Вычисляем площадь основания:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Тогда объем пирамиды:

$$V = S \cdot AA' = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$$

В ответ нужно записать  $\sqrt{3}V = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$

**Ответ:** 12

**Задача В3.** Найдите произведение корней уравнения:

$$5^{2x^2} - 4 \cdot 5^{x^2+2x+3} = 5^{4x+7}$$

**Решение.**

Обе части уравнения разделим на  $5^{4x+7}$ . При это потеря решений не произойдет, так как  $5^{4x+7} > 0$  при любых  $x$ :

$$5^{2x^2-4x-7} - 4 \cdot 5^{x^2-2x-4} = 1 \Rightarrow$$

$$5^{(2x^2-4x-8)+1} - 4 \cdot 5^{x^2-2x-4} = 1 \Rightarrow$$

$$5 \cdot 5^{2(x^2-2x-4)} - 4 \cdot 5^{x^2-2x-4} = 1$$

При преобразованиях мы использовали свойства степеней

Вводим замену:

$$t = 5^{x^2-2x-4}, t > 0$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$5t^2 - 4t = 1 \Rightarrow$$

$$5t^2 - 4t - 1 = 0$$

Решаем полученное квадратное уравнение:

$$D = 16 + 20 = 36 > 0$$

$$t_1 = \frac{4-6}{10} = -\frac{2}{5}; t_2 = \frac{4+6}{10} = 1$$

Первый корень не удовлетворяет ОДЗ, т.к.  $t > 0$ .

Тогда

$$5^{x^2-2x-4} = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

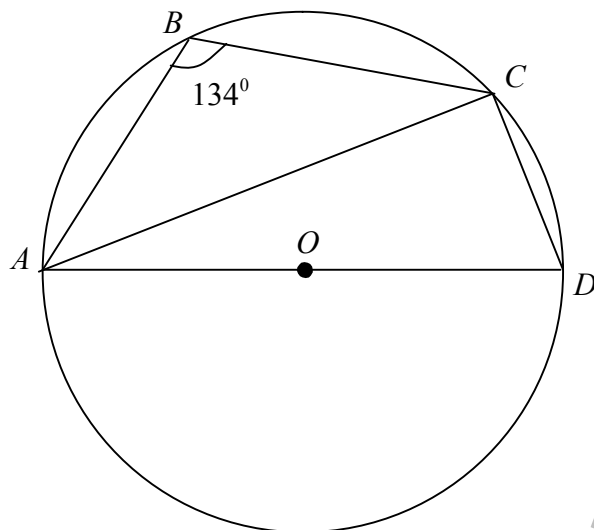
$$D = 4 + 16 = 20 > 0$$

Уравнение имеет два корня, произведение которых по теореме Виета равно  $-4$ .

**Ответ:** -4

**Задача В4.** Четырехугольник ABCD вписан в окружность так, что сторона AD является диаметром окружности и  $\angle ABC = 134^\circ$ . Найдите градусную меру угла CAD.

**Решение.**



Так как четырехугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равны  $180^\circ$ . Значит угол  $\angle CDA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$

Проведем диагональ CA четырехугольника. Угол  $\angle ACD = 90^\circ$ , т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности.

Из треугольника  $\triangle CAD$  с помощью теоремы о сумме углов треугольника находим:

$$\angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$$

**Ответ:** 44

**Задача В5.** Три числа, записанные по убыванию, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо меньшего числа записать число, равное -24, то эти числа будут образовывать арифметическую прогрессию. Найдите большее из этих чисел, если меньшее из них равно 1.

**Решение.**

Пусть  $x$  - наибольшее из чисел, а  $q$  - знаменатель геометрической прогрессии.

Тогда указанные числа:

$$x, qx, q^2x = 1 \text{ (мы учли, что наименьшее число равно 1).}$$

По условию числа  $x, qx, -24$  образуют арифметическую прогрессию, поэтому

$$\frac{x - 24}{2} = qx \text{ (каждое число в арифметической прогрессии равно среднему}$$

арифметическому числу, равноотстоящих от заданного – проверьте это самостоятельно).

Таким образом, получили систему уравнений:

$$\begin{cases} q^2x = 1 \\ x - 24 = 2qx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{q^2} \\ \frac{1}{q^2} - 24 = \frac{2}{q} \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$$\frac{1}{q^2} - 24 = \frac{2}{q} \Rightarrow$$

$$24q^2 + 2q - 1 = 0$$

$$D = 4 + 96 = 100$$

$$q_1 = \frac{-2 - 10}{48} = -\frac{1}{4}, q_2 = \frac{-2 + 10}{48} = \frac{1}{6}$$

По смыслу задачи подходит лишь второе значение  $q = \frac{1}{6}$ , так как, если бы  $q$  было отрицательным, то числа в геометрической прогрессии чередовались бы по знаку и не были бы записаны по убыванию, как требует условие задачи.

$$\text{Итак } q = \frac{1}{6}. \text{ Тогда } x = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 36$$

**Ответ:** 36

**Задача В6.** Пусть  $(x, y)$  - решение системы

$$\begin{cases} \frac{5x^2 - 11xy + 2y^2}{5x^2 + 4xy - y^2} = \frac{7}{10} \\ 5x - 13y = 32 \end{cases}$$

Найдите произведение  $xy$

**Решение.**

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{5x^2 - 11xy + 2y^2}{5x^2 + 4xy - y^2} = \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{5x^2 - 10xy - xy + 2y^2}{5x^2 + 5xy - xy - y^2} = \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{5x(x - 2y) - y(x - 2y)}{5x(x + y) - y(x + y)} = \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{(x - 2y)(5x - y)}{(x + y)(5x - y)} = \frac{7}{10}$$

Из знаменателя дроби в левой части уравнения следует ОДЗ системы:  $x \neq -y$ ;  $y \neq 5x$

Тогда, сокращая на  $5x - y$  и умножая обе части на  $x + y$ , получим:

$$x - 2y = \frac{7}{10}(x + y) \Rightarrow$$

$$10x - 20y = 7x + 7y \Rightarrow$$

$$3x = 27y \Rightarrow$$

$$x = 9y$$

Теперь используем второе уравнение системы:

$$5 \cdot 9y - 13y = 32 \Rightarrow$$

$$32y = 32 \Rightarrow$$

$$y = 1$$

$$\text{Тогда } x = 9$$

Произведение:  $xy = 1 \cdot 9 = 9$

**Ответ: 9**

**Задача В7.** Найдите сумму целых решений неравенства:

$$\frac{1}{\log_{2x-11}(x-3)} \leq \log_{x-3}(x^2 - 5x + 6) - 1$$

**Решение.**

Проведем сначала равносильные преобразования над неравенством. Для этого разложим квадратный трехчлен на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Тогда неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{\log_{2x-11}(x-3)} \leq \log_{x-3}(x-2)(x-3) - 1$$

Найдем ОДЗ для решений неравенства. Для этого, используя свойства логарифмов, запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 11 > 0 \\ 2x - 11 \neq 1 \\ x - 3 > 0 \\ x - 3 \neq 1 \\ (x - 2)(x - 3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5.5 \\ x \neq 6 \\ x > 3 \\ x \neq 4 \\ x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty) \end{cases}$$

Записываем область пересечения всех указанных интервалов:

$$x \in (5.5; 6) \cup (6; +\infty)$$

После записи ОДЗ можно смело проводить преобразования над неравенством.

Итак

$$\frac{1}{\log_{2x-11}(x-3)} = \log_{x-3}(2x-11) - 1$$
 - данное преобразование не требует дополнительных

пояснений, т.к. является известной тригонометрической формулой.

$\log_{x-3}(x-2)(x-3) = \log_{x-3}|x-2| + \log_{x-3}|x-3|$  - логарифм произведения представляем в виде суммы логарифмов. Модули в записи нужны обязательно, т.к. мы в общем случае не знаем знаки выражений  $x-2$  и  $x-3$ . Однако из ОДЗ видно, что оба выражения положительны, поэтому

$$\begin{aligned} \log_{x-3}(x-2)(x-3) &= \log_{x-3}|x-2| + \log_{x-3}|x-3| = \log_{x-3}(x-2) + \log_{x-3}(x-3) = \\ &= \log_{x-3}(x-2) + 1 \end{aligned}$$

Тогда мы получаем неравенство:

$$\log_{x-3}(2x-11) \leq \log_{x-3}(x-2) + 1 - 1 \Rightarrow$$

$$\log_{x-3}(2x-11) \leq \log_{x-3}(x-2)$$

Из ОДЗ следует, что выражение  $x-3 > 1$ , поэтому от полученного неравенства можем перейти к равносильному:

$$2x - 11 \leq x - 2 \Rightarrow$$

$$x \leq 9$$

Накладываем полученное множество решений на ОДЗ и получаем множество решений неравенства:

$$x \in (5.5; 6) \cup (6; 9]$$

Целые числа, входящие в область решений неравенства:

7, 8, 9 - их сумма равна 24.

**Ответ:** 24.

**Задача 8.** Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{tg} 12x - \operatorname{ctg} 12x = \frac{2 \cos^2 24x}{\sin 24x},$$

принадлежащих промежутку  $[0; 2\pi]$ .

**Решение.**

Найдем сначала ОДЗ для корней уравнения. Для этого учтем область определения тангенса и котангенса:

$$12x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ из области определения тангенса}$$

$$12x \neq \pi n \text{ из области определения котангенса.}$$

Объединим указанные системы ограничений в одну:

$$12x \neq \frac{\pi}{2} k \Rightarrow$$

$$x \neq \frac{\pi}{24} k, k \in Z$$

Кроме того, учтем, что знаменатель дроби в правой части выражения не должен быть равен нулю:

$$\sin 24x \neq 0 \Rightarrow$$

$$24x \neq \pi n \Rightarrow$$

$$x \neq \frac{\pi n}{24}$$

Таким образом, ОДЗ уравнения:

$$x \neq \frac{\pi}{24} k, k \in Z$$

Преобразуем уравнение:

$$\operatorname{tg} 12x - \operatorname{ctg} 12x = \frac{2 \cos^2 24x}{\sin 24x} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 12x - \operatorname{ctg} 12x = \frac{2 \cos^2 24x}{2 \sin 12x \cos 12x} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin 12x}{\cos 12x} \sin 12x \cos 12x - \frac{\cos 12x}{\sin 12x} \sin 12x \cos 12x = \cos^2 24x \Rightarrow$$

$$\sin^2 12x - \cos^2 12x = \cos^2 24x \Rightarrow$$

$$-(\cos^2 12x - \sin^2 12x) = \cos^2 24x \Rightarrow$$

$$-\cos 24x = \cos^2 24x \Rightarrow$$

$$\cos 24x (1 + \cos 24x) = 0$$

Переходим к двум уравнениям:

$$\cos 24x = 0 \Rightarrow$$

$$\cos 24x = -1 \Rightarrow$$

$$24x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad \text{или} \quad 24x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{24}, n \in Z \quad x = \frac{\pi(1+2n)}{24}, n \in Z$$

Вторая система решений не удовлетворяет ОДЗ при всех  $n$

Первое множество дает:

$$x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{24} = \frac{\pi(2n+1)}{48}$$

Данное множество решений удовлетворяет ОДЗ при всех  $n$ , т.к. выражение  $2n+1$  нечетно.

Найдем значения  $n$ , при которых корни уравнения попадают в интервал  $[0; 2\pi]$ . Для этого составим систему неравенств:

$$0 \leq \frac{\pi(2n+1)}{48} \leq 2\pi \Rightarrow$$

$$0 \leq 2n+1 \leq 96 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{95}{2}$$

Из полученного интервала выбираем лишь целые  $n$ :

$$n = 0, 1, \dots, \frac{94}{2} = 47$$

Тогда общее количество решений исходного уравнения, попадающего в заданный интервал равно 48.

**Ответ:** 48

**Задача В9.** Задумано целое положительное число. К его записи приписали справа цифру 6 и из полученного числа вычли квадрат задуманного. Разность уменьшилась на 80% и еще вычли задуманное число. В окончательном результате получили 0. Какое число задумано?

**Решение.**

Пусть задумано число  $x$ . После того, как справа приписали цифру 6, то получили число  $10x + 6$ . Из полученного числа вычитают квадрат задуманного:

$$10x + 6 - x^2$$

Полученное выражение уменьшают на 80%, т.е. получают 20% от этой разности:

$$0.2(10x + 6 - x^2)$$

Далее вычитают полученное число и получают 0:

$$0.2(10x + 6 - x^2) - x = 0$$

Решаем полученное уравнение:

$$10x + 6 - x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5-7}{2} = -1; x_2 = \frac{5+7}{2} = 6$$

Число -1 не подходит, так как задуманное число положительно по условию.

Таким образом, задумали число 6

**Ответ:** 6

**Задача В10.** Найдите увеличенную в пять раз сумму корней уравнения

$$\sqrt{9 + 2x\sqrt{9 - x^2}} = 9 - 2x$$

**Решение.**

Преобразуем данное уравнение:

$$\sqrt{9 + 2x\sqrt{9 - x^2}} = 9 - 2x \Rightarrow$$

$$\sqrt{9 - x^2 + 2x\sqrt{9 - x^2} + x^2} = 9 - 2x \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x + \sqrt{9 - x^2})^2} = 9 - 2x \Rightarrow$$

$$|x + \sqrt{9 - x^2}| = 9 - 2x$$

Перейдем от уравнения к системе:

$$\begin{cases} 9 - 2x \geq 0 \\ x + \sqrt{9 - x^2} = 9 - 2x \\ x + \sqrt{9 - x^2} = 2x - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4.5 \\ \sqrt{9 - x^2} = 9 - 3x \\ \sqrt{9 - x^2} = x - 9 \end{cases}$$

Решаем уравнения из совокупности:

1-е уравнение

$$\sqrt{9 - x^2} = 9 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3x \geq 0 \\ 9 - x^2 = (9 - 3x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (3 - x)(3 + x) = 9(3 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 3 \\ 3 + x = 9(3 - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 3 \\ x = 2.4 \end{cases}$$

$$x_1 = 2.4; x_2 = 3$$

2-е уравнение:

$$\sqrt{9 - x^2} = x - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 = (x - 9)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ 9 - x^2 = x^2 - 18x + 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ 2x^2 - 18x + 72 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x^2 - 9x + 36 = 0 \end{cases}$$

Уравнение  $x^2 - 9x + 36 = 0$  корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицателен, поэтому корнями исходного уравнения являются:

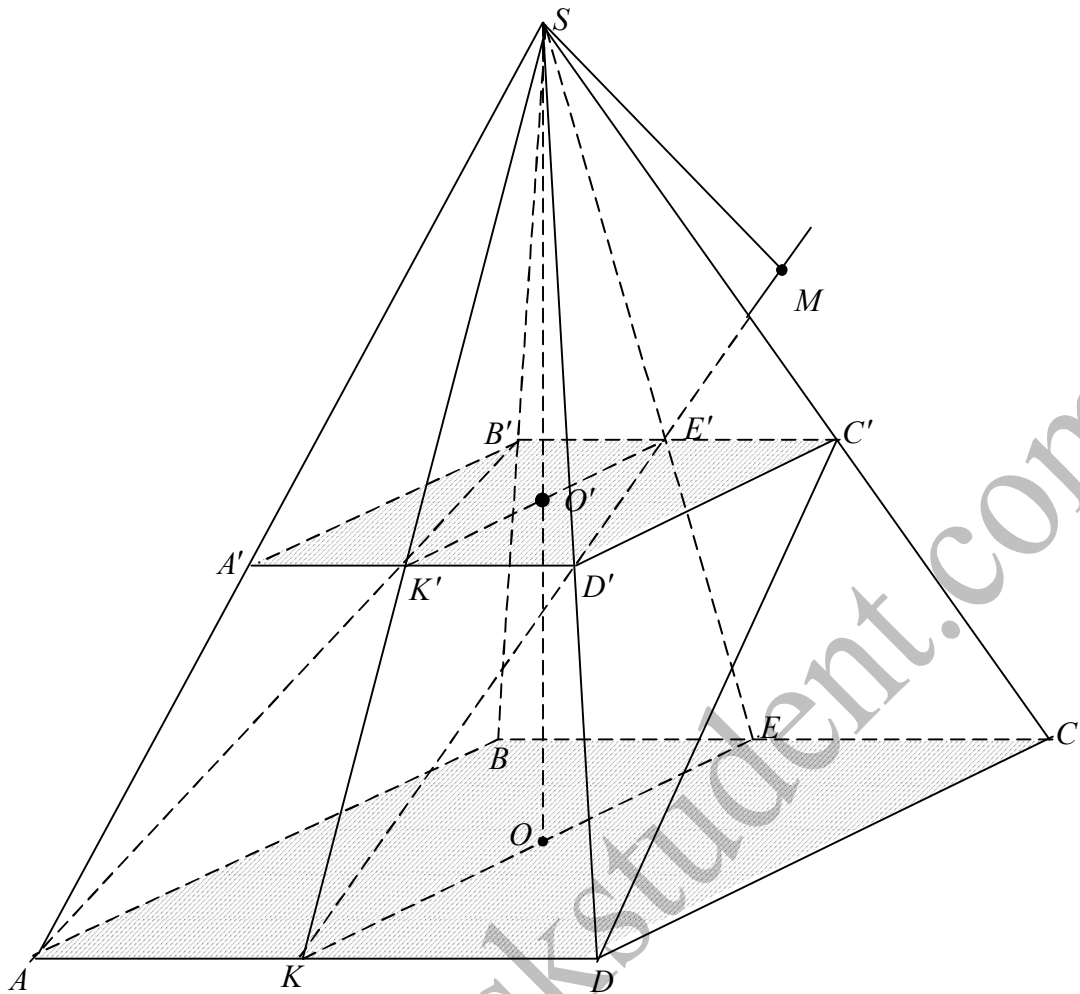
$$x_1 = 2.4; x_2 = 3$$

Их сумма, увеличенная в 5 раз:  $5 \cdot (3 + 2.4) = 15 + 12 = 27$

**Ответ:** 27.

**Задача В11.** Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 9. Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. Найдите значение выражения  $5N$ , где  $N$  - число, показывающее в каком отношении проведенная плоскость делит объем пирамиды, если известно, что  $N > 1$ .

**Решение.**



Пусть  $ABCD A'B'C'D'$  - заданная усеченная пирамида, причем  $AD = 9$ ;  $A'D' = 3$ . Достроим данную пирамиду до полной пирамиды  $SABCD$ .

Для пирамиды  $SABCD$  построим высоту  $SO$ , а для пирамиды  $SA'B'C'D'$  - высоту  $SO'$ .

Пирамиды  $SABCD$  и  $SA'B'C'D'$  подобны, поэтому:

$$\frac{SO'}{A'D'} = \frac{SO}{AD} \Rightarrow$$

$$SO = \frac{AD}{A'D'} SO' = 3SO'$$

Обозначим  $SO' = h$ , тогда  $SO = 3h$

Объем пирамиды  $SABCD$  равен:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 3h = 81h$$

Объем пирамиды  $SA'B'C'D'$  равен:

$$V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot h = 3h$$

Тогда объем усеченной пирамиды:

$$V_{ABCD A'B'C'D'} = V_{SABCD} - V_{SA'B'C'D'} = 81h - 3h = 78h$$

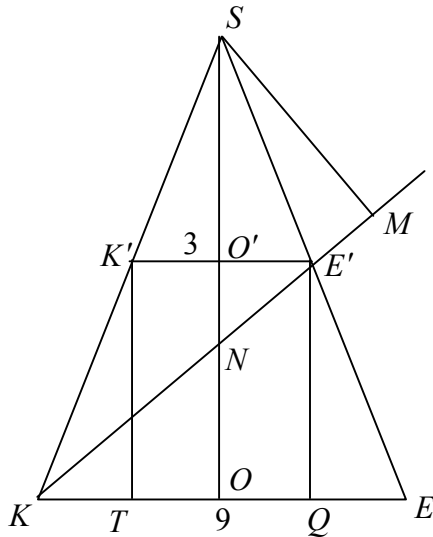
Построим сечение усеченной пирамиды плоскостью  $AB'C'D$ . Четырехугольник  $AB'C'D$  является трапецией с параллельными основаниями  $AD$  и  $B'C'$ .

Рассмотрим пирамиду  $SAB'C'D$ , в основании которой лежит трапеция  $AB'C'D$ . Найдем объем этой пирамиды. Для этого необходимо найти высоту пирамиды и площадь основания  $AB'C'D$ .

Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину  $S$  перпендикулярно основанию  $ABCD$ . В сечении получается равнобедренный треугольник  $\Delta KSE$ . Плоскость  $(KSE)$  пересекает плоскость верхнего основания усеченной пирамиды по прямой  $K'E'$ , а плоскость  $(AB'C'D')$  по прямой  $KE'$ . Прямая  $KE'$  перпендикулярна  $AD$ , а значит отрезок  $KE'$  является высотой трапеции  $AB'C'D'$ .

В плоскости  $(KSE)$  из точки  $S$  опустим перпендикуляр на прямую  $KE'$ . Отрезок  $SM$  является высотой пирамиды  $SAB'C'D'$ .

Для нахождения длин  $KE'$  и  $SM$  вычертим отдельно сечение  $KSE$ .



Четырехугольник  $KK'E'E$  является равнобедренной трапецией. Из точек  $K'$  и  $E'$  проведем высоты  $K'T$  и  $E'Q$ . Четырехугольник  $TK'E'Q$  - прямоугольник, поэтому  $TQ = K'E' = 3$

Треугольники  $\Delta K'KT$  и  $\Delta E'QE$  равны по гипотенузе и катету, поэтому

$$KT = QE = \frac{9-3}{2} = 3$$

Длина  $E'Q = 3h - h = 2h$ .

Тогда

$$KE' = \sqrt{(2h)^2 + 6^2} = \sqrt{4h^2 + 36} = 2\sqrt{h^2 + 9} \quad - \quad \text{по}$$

теореме Пифагора.

Пусть  $N$  - точка пересечения  $SO$  и  $KE'$ .

Треугольники  $KON$  и  $EO'N$  подобны по двум углам.

Отсюда

$$\frac{KO}{ON} = \frac{E'O'}{O'N} \Rightarrow$$

$$ON = \frac{KO}{E'O'} O'N = \frac{4.5}{1.5} O'N = 3O'N$$

Так как  $ON + O'N = 2h$ , то  $4O'N = 2h \Rightarrow O'N = \frac{h}{2}$ . Тогда  $ON = \frac{3}{2}h$ ,  $SN = 3h - \frac{3}{2}h = \frac{3}{2}h$ .

$$\text{Тогда } KN = \sqrt{KO^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}h\right)^2}$$

Далее, треугольники  $KON$  и  $SMN$  также подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{KO}{SM} = \frac{KN}{SN} \Rightarrow$$

$$SM = \frac{KO}{KN} SN = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}h\right)^2}} \cdot \frac{3}{2}h = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)}{\frac{3}{2}\sqrt{h^2 + 9}} \cdot \frac{3}{2}h = \frac{9}{2\sqrt{h^2 + 9}} h$$

Вычисляем объем пирамиды  $SAB'C'D'$ .

$$\text{Площадь основания: } S_{AB'C'D'} = \frac{B'C' + AD}{2} KE' = \frac{3+9}{2} 2\sqrt{h^2 + 9} = 12\sqrt{h^2 + 9}$$

$$\text{Тогда } V_{SAB'C'D'} = \frac{1}{3} S_{AB'C'D'} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{h^2 + 9} \cdot \frac{9}{2\sqrt{h^2 + 9}} h = 18h$$

Тогда объем многогранника  $ABCDB'C'$  равен:

$$V_{ABCD B'C'} = V_{SABCD} - V_{SAB'C'D} = 81h - 18h = 63h$$

Так как объем усеченной пирамиды равен  $78h$ , то плоскость  $AB'C'D$  разбивает пирамиду на два многогранника объемами  $63h$  и  $15h$ .

Отношение объемов:

$$N = \frac{63}{15} = \frac{21}{5}$$

Тогда

$$5N = 21$$

**Ответ:** 21

**Задача В12.** Найдите сумму корней уравнения

$$\log_{\frac{\pi}{9}} \left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| - |x-1| + \sqrt{x^2 - 2x + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right|} = 0,$$

принадлежащих промежутку  $[-21; 28]$ .

**Решение.**

Рассмотрим подкоренное выражение.

$$x^2 - 2x + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right| = x^2 - 2x + 1 - 1 + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right| = (x-1)^2 - 1 + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right|$$

Так как  $\left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| \leq 1$ , то  $\left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right| \geq 1$ , значит

$$\sqrt{x^2 - 2x + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right|} = \sqrt{(x-1)^2 - 1 + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right|} \geq \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

Кроме того, т.к.  $\left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| \leq 1$  и  $\frac{\pi}{9} < 1$ , то  $\log_{\frac{\pi}{9}} \left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| \geq 0$

Значит выражение

$$\log_{\frac{\pi}{9}} \left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| - |x-1| + \sqrt{x^2 - 2x + \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right|} \geq 0 - |x-1| + |x-1| = 0$$

Таким образом, равенство нулю левой части уравнения возможна только в том случае, если одновременно выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{3}} \right| = 1 \\ \log_{\frac{\pi}{9}} \left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} = \pm 1 \\ \left| \cos \frac{\pi x}{3} \right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} = \pm 1 \\ \cos \frac{\pi x}{3} = \pm 1 \end{cases}$$

Таким образом, оба условия системы эквивалентны, а значит исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\cos \frac{\pi x}{3} = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi x}{3} = \pi n, n \in Z \Rightarrow$$

$$x = 3n$$

Промежутку  $x \in [-21; 28]$  соответствует промежуток для  $n$ :  $n \in [-7; 9]$  - 17 значений

Корни уравнения, удовлетворяющие указанному условию:  $x = -21, -18, \dots, 24, 27$ . Эти числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этой прогрессии:

$$S = \frac{-21 + 27}{2} \cdot 17 = 3 \cdot 17 = 51$$

**Ответ:** 51