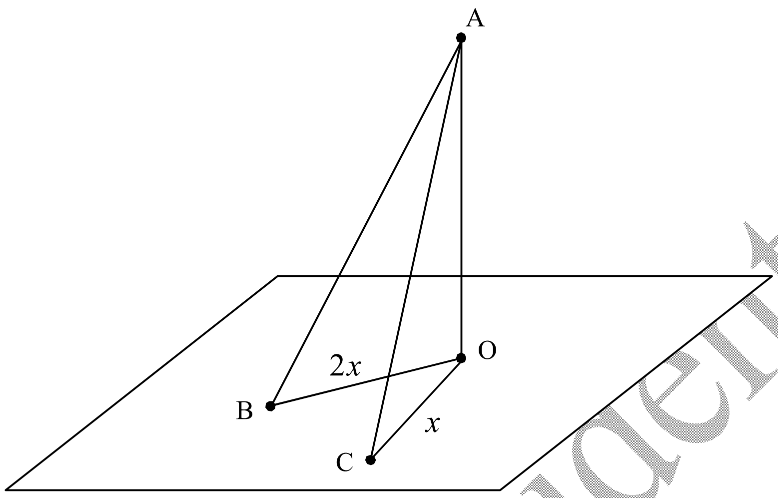
Решение задач из теста по математике за 2010 г.

Вариант 1

Задача В1. Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины проекций которых относятся как 1:2. Найдите квадрат длины проекции меньшей наклонной, если длины наклонных равны 8 и 10.

Решение.



Пусть AB и AC – две проведенные наклонные. Точка O – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость.

Пусть $OC = x$ - меньшая проекция. Тогда $OB = 2x$, т.к. по условию длины проекций относятся как 1:2.

Так как меньшей наклонной соответствует меньшая проекция, то $AB = 10$, а $AC = 8$.

Треугольники ΔABO и ΔACO прямоугольные с общим катетом AO. Из теоремы Пифагора для каждого из треугольников можем выразить:

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = 10^2 - (2x)^2$$

$$AO^2 = AC^2 - CO^2 = 8^2 - x^2$$

Приравнивая, правые части записанных равенств, получим уравнение:

$$10^2 - (2x)^2 = 8^2 - x^2 \Rightarrow$$

$$4x^2 - x^2 = 100 - 64 \Rightarrow$$

$$3x^2 = 36 \Rightarrow$$

$$x^2 = 12$$

Это и есть меньшая наклонная.

Ответ: 12

Задача В2. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ при $x = 4^{\frac{20}{3}}$

Решение.

Для решения такого вида заданий очень удобно сразу перейти к дробным степеням:

www.minskstudent.com

$$\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x\cdot x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{3}{10}}$$

Учитывая, что $x=4^{\frac{20}{3}}$, получаем:

$$\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=x^{\frac{3}{10}}=\left(4^{\frac{20}{3}}\right)^{\frac{3}{10}}=4^{\frac{20}{3}\cdot\frac{3}{10}}=4^2=16$$

Ответ: 16

Задача В3. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 32, а высоты раны 2 и 6.

Решение.
Пусть a и b - длины двух смежных сторон параллелограмма, а h_a и h_b - высоты, проведенные к этим сторонам.
Тогда периметр параллелограмма:
$$P=2(a+b)=32$$
Площадь же параллелограмма можно записать двумя способами:
$$S=ah_a=bh_b$$
Составляем систему уравнений:
$$\begin{cases}2a=6b\\ a+b=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3b\\ 3b+b=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=12\\ b=4\end{cases}$$
Площадь параллелограмма:
$$S=2\cdot 12=24$$

Ответ: 24

Задача В4. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений выражения $\sqrt{4+3x-x^2}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

Решение.
Учтем, что $y=\sqrt{x}$ - возрастающая функция. Это значит, что чем больше значение выражения под корнем, тем больше значение самого корня. Естественно нельзя забывать и про область определения корня: подкоренное выражение должно быть неотрицательным.
С учетом этого задача сводится к исследованию подкоренной функции.
$$y=4+3x-x^2$$
Графиком этой функции является парабола. Ветви параболы направлены вниз.
Найдем нули функции:
$$4+3x-x^2=0$$
$$D=9+16=25;\ \sqrt{D}=5$$
$$x_1=\frac{-3-5}{-2}=4;\ x_2=\frac{-3+5}{-2}=-1$$
Вершина параболы:

$x_в = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

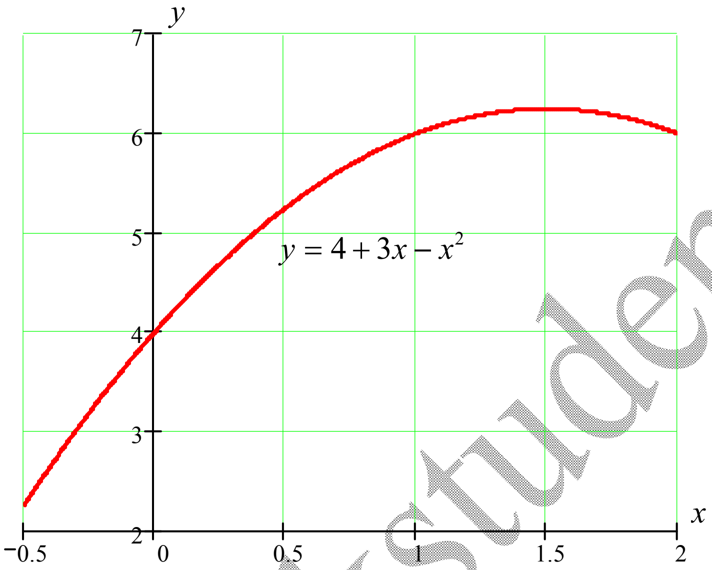
$y_в = 4 + 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

Рассчитаем, также, значения функции на границах интервала:

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$y(2) = 4 + 6 - 4 = 6$

Изобразим график параболы.



Итак, максимальное значение подкоренного выражения на интервале $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ равно $\frac{25}{4}$, а минимальное - $\frac{9}{4}$. Тогда максимальное значение выражения $\sqrt{4 + 3x - x^2}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ равно $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, а минимальное $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Сумма этих значений составляет: $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$

Ответ: 4

Задача B5. Найдите сумму всех целых значений x, принадлежащих области определения функции

$$y = \sqrt{2 - \frac{x^2 + 4}{2x}} + \sqrt{6 + x}$$

Решение.

Нахождение области определения функции сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} 2 - \dfrac{x^2 + 4}{2x} \ge 0 \\ 6 + x \ge 0 \end{cases}$$

Из второго неравенства системы сразу получаем:

$x \ge -6$

www.minskstudent.com

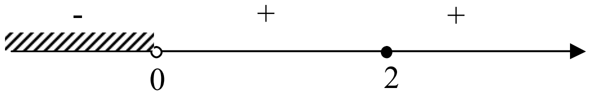
Преобразуем второе неравенство и решим его:

$$\frac{x^2+4}{2x}-2\le 0\Rightarrow$$

$$\frac{x^2-4x+4}{2x}\le 0\Rightarrow$$

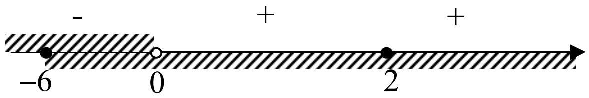
$$\frac{(x-2)^2}{2x}\le 0$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов.



Расстановка знаков для более-менее подготовленных абитуриентов не составит особого труда. Главное не забыть выколоть точку $x=0$, а также учесть, что при переходе через точку $x=2$ функция не поменяет знак, т.к. одночлен $(x-2)^2$ возводится в квадрат.

На полученную область необходимо наложить интервал $x\ge -6$:



По полученной схеме записываем решение неравенства.

$x\in[-6,0)\cup\{2\}$

Многие забывают включить число $x=2$ в область решений, что, естественно, приведет к неправильному ответу.

Выписываем все целые решения неравенства: -6, -5, -4, -3, -2, -1, 2. Их сумма равна -19.

Ответ: -19

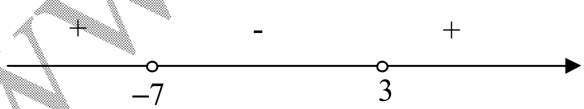
Задача В6. Найдите количество целых корней уравнения:

$$\frac{|x^2+4x-21|}{x^2+4x-21}=\frac{|x^2-x-30|}{x-x^2+30}$$

Решение.

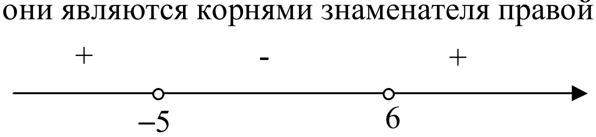
Для решения данного уравнения необходимо провести операцию по раскрытию модулей. Для этого необходимо выяснить, какие знаки имеют подмодульные выражения при различных значения x.

Рассмотрим квадратный трехчлен $x^2+4x-21$. Его корни: $x_1=-7; x_2=3$. Расставим знаки трехчлена на числовой прямой:



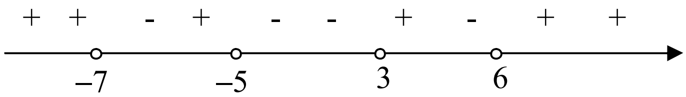
Точки -7 и 3 выколоты, т.к. эти точки также являются корнями знаменателя, а значит должны быть исключены.

Аналогично, квадратный трехчлен x^2-x-30 имеет корни $x_1=-5; x_2=6$. Расставляем знаки трехчлена на числовой прямой. Сами точки $x_1=-5; x_2=6$ также выкалываем, т.к. они являются корнями знаменателя правой части уравнения.



www.minskstudent.com

Для удобства объединим оба рисунка:



На каждом интервале поставлено два знака: левый – знак подмодульного выражения в левой части уравнения, а правый – знак подмодульного выражения в правой части уравнения.

На каждом из интервалов (всего их 5) из исходного уравнения путем раскрытия соответствующего модуля с соответствующим знаком получаем свое уравнение.

1. $x \in (-\infty; 7)$

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2+4x-21} = \frac{x^2-x-30}{x-x^2+30} \Rightarrow$$

$$1 = -\frac{x^2-x-30}{x^2-x-30} \Rightarrow$$

$$1 = -1$$

Данное уравнение не имеет решений.

2. $x \in (-7; -5)$

$$-\frac{x^2+4x-21}{x^2+4x-21} = \frac{x^2-x-30}{x-x^2+30} \Rightarrow$$

$$-1 = -1$$

Полученное равенство справедливо при любых x из рассматриваемого интервала, т.е. $x \in (-7; -5)$ - решения исходного уравнения.

Продолжая аналогичные рассуждения, видим, что решения уравнения получается только на тех интервалах, где знаки модулей различны. Таких интервалов всего два. Первый мы только что рассмотрели, а второй $x \in (3; 6)$

Итак, решение исходного уравнения имеет вид:

$x \in (-7; -5) \cup (3; 6)$

Выписываем целые корни: $-6; 4; 5$. Всего их 3.

Ответ: 3

Задача B7. Решите неравенство

$3^{x-2} \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} - 270 \cdot 3^{x-3} + 900 \le 0$.

В ответ запишите сумму наименьшего и наибольшего целых решений.

Решение.

Для начала уберем лишние степени на тройкой и двойкой, сделав так, чтобы в выражение в левой части неравенства входили только 2^x и 3^x. Для этого используем свойства степеней:

$$\frac{3^x}{3^2} \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x \cdot 2 - 270 \cdot \frac{3^x}{3^3} + 900 \le 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3^x}{9} \cdot 2^x - 10 \cdot 2^x - 10 \cdot 3^x + 900 \le 0$$

www.minskstudent.com

После такой процедуры естественно попытаться привести левую часть неравенства к одному основанию, например $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Но после недолгих стараний можно убедиться, что этот метод в данном примере не проходит.
Еще одна возможность – группировка:

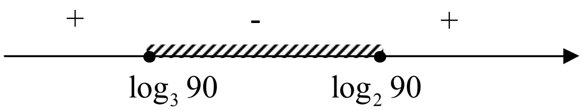
$$2^x\left(\frac{3^x}{9}-10\right)-10\left(3^x-90\right)\le 0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{9}\cdot 2^x\left(3^x-90\right)-10\left(3^x-90\right)\le 0\Rightarrow$$

$$2^x\left(3^x-90\right)-90\left(3^x-90\right)\le 0\Rightarrow$$

$$\left(3^x-90\right)\left(2^x-90\right)\le 0$$

После приведения неравенства к такому виду можно использовать метод интервалов.
Корни выражения в левой части неравенства:
$x_1=\log_3 90;\ x_2=\log_2 90$, причем $x_2>x_1$
Расставляем знаки неравенства на числовой прямой:



Итак, решение исходного неравенства: $x\in\left[\log_3 90;\log_2 90\right]$.
Для того, чтобы ответить на вопрос задачи необходимо определить, какие целые числа входят в область решений.
Т.к. $3^4=81$, а $3^5=243$, то $4<\log_3 90<5$.
Т.к. $2^6=64$, а $2^7=128$, то $6<\log_2 90<7$
Тогда крайние целые числа, которые входят в область решений это 5 и 6. Их сумма равна 11.

Ответ: 11

Задача В8. Банка, имеющая форму правильной четырехугольной призмы, частично заполнена водой. Сторона основания банки равна $2\sqrt{31}$. В эту банку опустили кубик, ребро которого равно a, при этом кубик лег на дно банки, а поверхность воды поднялась настолько, что стала касательной к верхней грани кубика. Если вместо этого кубика опустить кубик, ребро которого равно $\frac{1}{5}a$, то произойдет то же самое. Найдите a.

Решение.

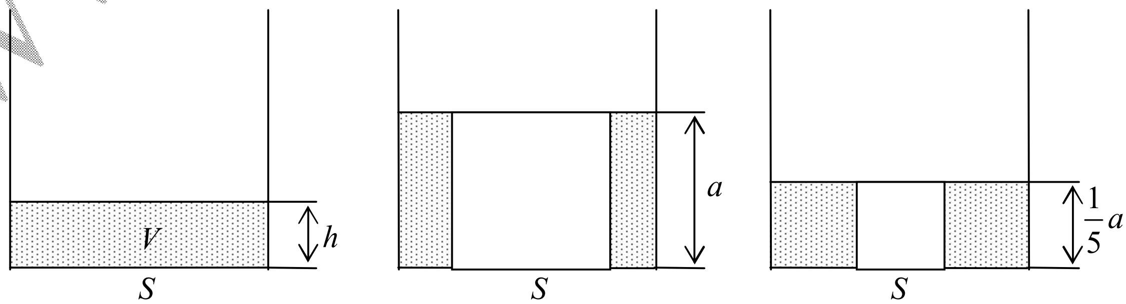


Рис. а Рис. б Рис. в

www.minskstudent.com

Для решение задачи необходимо сделать чертеж. На рис. а изображена банка с водой. Т.к. банка является правильной четырехугольной призмы, то основание банки – квадрат. Площадь основания: $S=\left(2\sqrt{31}\right)^2=124$

Пусть V - объем воды в банке. Эта величина является постоянной, т.е. не изменяется при погружении в воду кубика. Именно этот факт и является ключом к решению задачи.
На рис. б изображена банка с погруженным в нее кубиком. Т.к. вода в банке по условию выровнялась с верхней гранью кубика, то полный объем, занимаемый кубиком и водой составляет $S\cdot a=124a$, объем самого кубика: a^3. Тогда объем воды в банке:
$V=124a-a^3$

Аналогично при погружении кубика с ребром $\frac{1}{5}a$ (рис. в) объем воды с кубиком: $124\cdot\frac{1}{5}a$, объем кубика: $\left(\frac{1}{5}a\right)^3=\frac{a^3}{125}$. Тогда объем воды в банке:

$V=\frac{124}{5}a-\frac{a^3}{125}$

Т.к. объем воды не меняется, то

$\frac{124}{5}a-\frac{a^3}{125}=124a-a^3$

Получили уравнение. Т.к. $a>0$ (сторона кубика), то на a можем сократить:

$\frac{124}{5}-\frac{a^2}{125}=124-a^2\Rightarrow$

$\frac{124}{125}a^2=\frac{496}{5}\Rightarrow$

$a^2=100\Rightarrow$

$a=\pm10$

Отрицательный корень нам не подходит, поэтому в ответ записываем 10.

Ответ: 10

Задача В9. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми: $y-x=3, y=9$ и $5x+6y=-26$.

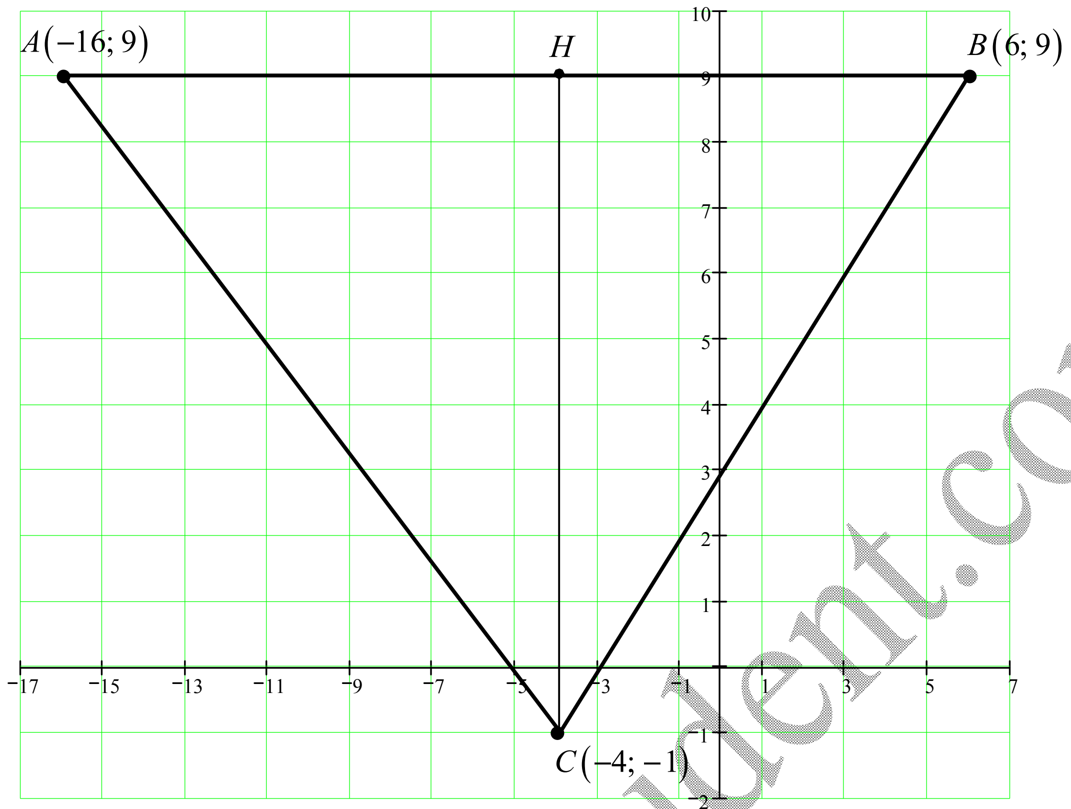
Решение.
Для начала необходимо определить, о какой фигуре идет речь. Очевидно, что три прямые, пересекаясь, могут образовывать только треугольник. Значит, задача состоит в нахождении площади треугольника. Построим этот треугольник по координатам его вершин. Для этого найдем вершины треугольника, составляя и решая соответствующие системы уравнений:

1. $\begin{cases} y-x=3 \\ y=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 9-x=3 \\ y=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=6 \\ y=9 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 5x+6y=-26 \\ y=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 5x+54=-26 \\ y=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 5x=-80 \\ y=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-16 \\ y=9 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} 5x+6y=-26 \\ y-x=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 5x+6y=-26 \\ y=x+3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 5x+6x+18=-26 \\ y=x+3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 11x=-44 \\ y=x+3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}.$

Указываем на координатной плоскости все вершины и строим треугольник.



Из чертежа находим: $AB = 6 - (-16) = 22$ - длина стороны АВ треугольника.

$CH = 9 - (-1) = 10$ - длина высоты СН треугольника.

Зная, длины стороны и опущенной на эту сторону высоты, находим площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 10 = 110$$

Заметим, что в данной задаче треугольник получился достаточно простым: одна из сторон параллельна оси Ох. Это позволяет очень просто вычислить длины стороны и высоты. Для расчета площади более «сложного» треугольника можно найти длины всех его сторон (используя координаты вершин) и рассчитать площадь по формуле Герона.

Ответ: $S = 110$

Задача В10. Вычислите: $\left(6+\sqrt{37}\right)^{\log_6\left(4+\sqrt{15}\right)} \cdot 100^{\lg\sqrt{23}} \cdot \left(4-\sqrt{15}\right)^{-\log_{36}\left(6-\sqrt{37}\right)^2}$.

Решение.

Сначала преобразуем сомножитель $100^{\lg\sqrt{23}} = \left(10^2\right)^{\lg\sqrt{23}} = 10^{2\cdot\lg\sqrt{23}} = 10^{\lg 23} = 23$ (в последнем равенстве применено основное логарифмическое тождество).

Дальнейшие преобразования будут производиться над оставшимися двумя множителями.

Вся идея примера строится на том, что числа $\sqrt{37}+6$ и $\sqrt{37}-6$ являются взаимно обратными, т.е. $\sqrt{37}-6 = \frac{1}{\sqrt{37}+6} = \left(\sqrt{37}+6\right)^{-1}$.

www.minskstudent.com

Действительно, $\left(\sqrt{37}-6\right)\left(\sqrt{37}+6\right)=\left(\sqrt{37}\right)^2-6^2=37-36=1$, что и доказывает приведенное утверждение.
Аналогично $\left(4-\sqrt{15}\right)=\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}$.

Итак, рассмотрим выражение $\left(6+\sqrt{37}\right)^{\log_6\left(4+\sqrt{15}\right)}\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)^{-\log_{36}\left(6-\sqrt{37}\right)^2}$.

Попытаемся первый множитель привести к основанию $4+\sqrt{15}$. С использованием основного логарифмического тождества получаем:

$$\left(6+\sqrt{37}\right)^{\log_6\left(4+\sqrt{15}\right)}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_{\left(4+\sqrt{15}\right)}\left(\left(6+\sqrt{37}\right)^{\log_6\left(4+\sqrt{15}\right)}\right)}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\log_{\left(4+\sqrt{15}\right)}\left(6+\sqrt{37}\right)}=$$

$$=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{1}{\log_{\left(4+\sqrt{15}\right)}6}\cdot\log_{\left(4+\sqrt{15}\right)}\left(6+\sqrt{37}\right)}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{\log_{\left(4+\sqrt{15}\right)}\left(6+\sqrt{37}\right)}{\log_{\left(4+\sqrt{15}\right)}6}}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(6+\sqrt{37}\right)}$$

Как говорится, ловкость рук и никакого мошенничества. При вычислениях мы использовали равенство $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$, а также формулу перехода к новому основанию.

Далее

$$\left(4-\sqrt{15}\right)^{-\log_{36}\left(6-\sqrt{37}\right)^2}=\left(4-\sqrt{15}\right)^{-\log_{6^2}\left(6-\sqrt{37}\right)^2}=\left(4-\sqrt{15}\right)^{-\frac{2}{2}\log_6\left|6-\sqrt{37}\right|}=\left(4-\sqrt{15}\right)^{-\log_6\left(\sqrt{37}-6\right)}=$$

$$=\left(\left(4-\sqrt{15}\right)^{-1}\right)^{\log_6\left(\sqrt{37}-6\right)}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(\sqrt{37}-6\right)}$$

Здесь при вынесении за логарифм двойки из степени числа $6-\sqrt{37}$ возникает модуль, т.к. $6-\sqrt{37}<0$. Модуль, далее, легко раскрывается со знаком «-». Кроме того, использовано доказанное выше равенство $\left(4-\sqrt{15}\right)^{-1}=\left(4+\sqrt{15}\right)$.

В итоге, получаем:

$$\left(6+\sqrt{37}\right)^{\log_6\left(4+\sqrt{15}\right)}\cdot100^{\lg\sqrt{23}}\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)^{-\log_{36}\left(6-\sqrt{37}\right)^2}=23\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(6+\sqrt{37}\right)}\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(\sqrt{37}-6\right)}=$$

$$=23\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(6+\sqrt{37}\right)+\log_6\left(\sqrt{37}-6\right)}=23\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6\left(\left(6+\sqrt{37}\right)\left(\sqrt{37}-6\right)\right)}=23\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_6 1}=$$

$$=23\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)^0=23$$

Ответ: 23

Задача B11. Найдите количество корней уравнения

$$\cos4x\cdot\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$

принадлежащих отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение.
Так как для любого угла α справедливо $-1\le\sin\alpha\le1; -1\le\cos\alpha\le1$, то приведенное в условии уравнение равносильно следующей совокупности:

www.minskstudent.com

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x = 1\\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x = -1\\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases}\end{array}\right.$$

Во всех остальных случаях произведение $\cos 4x \cdot \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ будет больше -1.

Решим системы уравнений из записанной совокупности.

1. $\begin{cases}\cos 4x = 1\\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x = 2\pi k\\ 3x+\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi k}{2}\\ 3x = -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi k}{2}\\ x = -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi n}{3}\end{cases}, n,k \in Z$

Для того, чтобы довести решение данной системы до конца необходимо подобрать такие целые числа k и n, чтобы сравнять x в верхнем и нижнем выражениях. Т.е. необходимо в целых числах решить уравнение:

$-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi n}{3} = \dfrac{\pi k}{2} \Rightarrow$

$-3+8n = 6k \Rightarrow$

$8n = 6k+3$

Число $8n$ всегда четное, а число $6k+3$ всегда нечетное, поэтому первая система совокупности решений не имеет.

2. $\begin{cases}\cos 4x = -1\\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x = \pi+2\pi k\\ 3x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\\ 3x = \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3}\end{cases}, k,n \in Z$

Аналогично предыдущему случаю составляем уравнение:

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2} = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3} \Rightarrow$

$2+6k = 8n \Rightarrow$

$4n = 3k+1$

Последнее уравнение будет выполнено, если выражение $3k+1$ кратно четырем, что возможно при $k = 1+4t,\ t \in z$. Действительно $3(1+4t)+1 = 12t+4$ - делится на 4.

Таким образом, решение данной системы, а значит и исходного уравнения можно записать в виде:

$x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi(1+4t)}{2} = \dfrac{3\pi}{4}+2\pi t,\ t \in Z$

Найдем интервал изменения t, при котором корни уравнения попадают в промежуток $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; 3\pi\right]$. Для этого решим систему неравенств:

www.minskstudent.com

$$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi t \le 3\pi \Rightarrow$$

$$-\frac{7}{2} \le \frac{3}{4} + 2t \le 3 \Rightarrow$$

$$-\frac{17}{4} \le 2t \le \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{17}{8} \le t \le \frac{9}{8} \Rightarrow$$

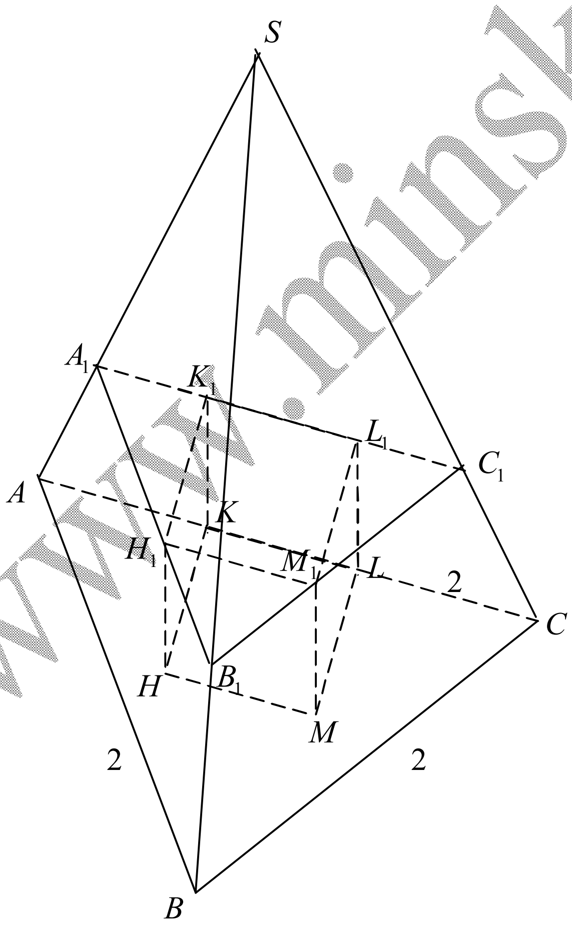
$$-2\frac{1}{8} \le t \le 1\frac{1}{8}$$

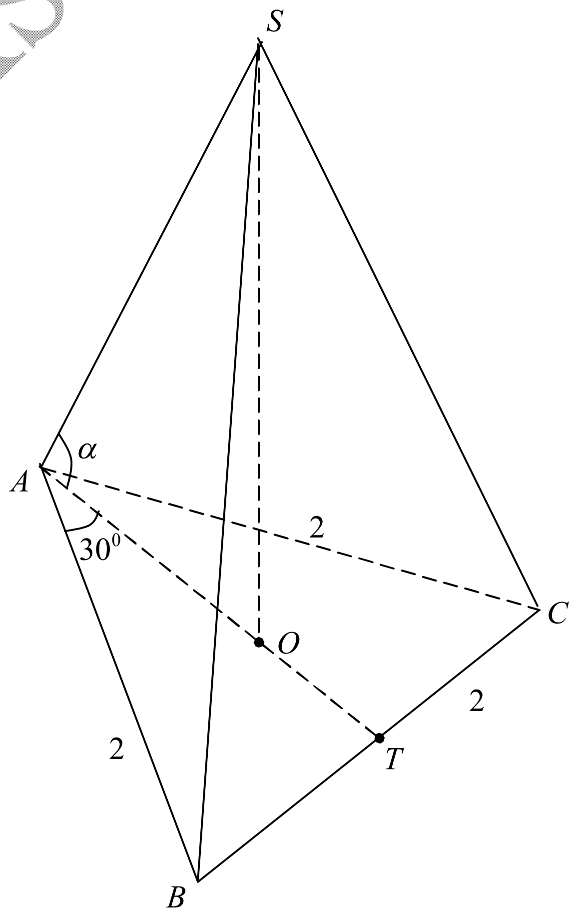
Целые t, принадлежащие указанному интервалу -2, -1, 0, 1. Таким образом, отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; 3\pi\right]$ принадлежит 4 корня уравнения $\cos 4x \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Ответ: 4

Задача B12. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 2, тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен 3. В пирамиду вписан куб так, что грань куба лежит в плоскости основания пирамиды. На одной боковой грани пирамиды лежат две вершины куба, на двух других боковых гранях – по одной. Найдите длину ребра куба a. В ответ запишите $a\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Решение.



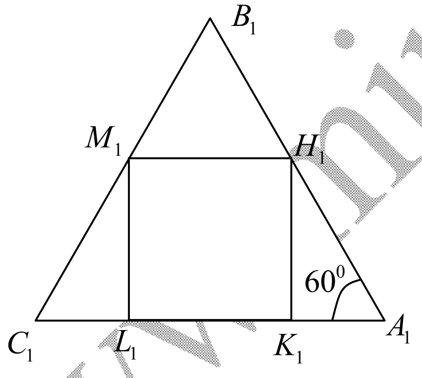


www.minskstudent.com

Определим для начала идею решения задачи. Верхняя грань куба вписана в равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$. Сторону этого треугольника можно выразить через сторону куба a, используя подобие пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$. Далее нужно будет рассмотреть равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ и вычислить сторону квадрата, который можно в него вписать. Но эта сторона равна a, что позволит нам составить уравнение для нахождения a.
Теперь рассмотрим предложенную схему более подробно.
Для начала найдем высоту пирамиды SO. Так как пирамида правильная, то треугольник ABC равносторонний. Медиана этого треугольника $AT = AB\cos 30^0 = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
Основание высоты пирамиды (точка О) находится в точке пересечения медиан основания, поэтому $AO = \dfrac{2}{3}AT = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. Треугольник AOS - прямоугольный, поэтому $SO = AOtg\alpha = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot 3 = 2\sqrt{3}$.
Пусть в пирамиду указанным в условии образом вписывается куба $HKLMH_1K_1L_1M_1$. Плоскость, содержащая верхнюю грань куба $H_1K_1L_1M_1$ параллельна плоскости основания пирамиды (ABC), а значит пирамиды $SA_1B_1C_1$ и $SABC$. Сечение $A_1B_1C_1$ представляет собой равносторонний треугольник. Выразим сторону этого треугольника через ребро куба a.Высота пирамиды $SA_1B_1C_1$ равна $SO - a = 2\sqrt{3} - a$. Тогда из подобия пирамид:

$$\frac{2\sqrt{3}-a}{A_1B_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A_1B_1 = \frac{2\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{a}{\sqrt{3}}$$



Рассмотрим отдельно треугольник $A_1B_1C_1$ с вписанной в него гранью куба $H_1K_1L_1M_1$..

Отрезок $A_1K_1 = \dfrac{A_1C_1 - L_1K_1}{2} = \dfrac{2 - \frac{a}{\sqrt{3}} - a}{2}$ ($L_1K_1 = a$ как ребро куба)
С другой стороны:

$H_1K_1 = A_1K_1tg60^0 = \dfrac{2 - \frac{a}{\sqrt{3}} - a}{2}\cdot\sqrt{3}$, но H_1K_1 также равно a.
Получаем уравнение:

$$a = \frac{2 - \frac{a}{\sqrt{3}} - a}{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$2a = 2\sqrt{3} - a - a\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$a\left(3+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

www.minskstudent.com

В ответ записываем $a\left(\sqrt{3}+1\right)=2$

Ответ: 2

www.minskstudent.com